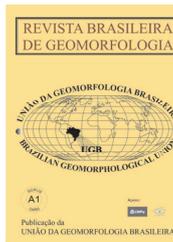


www.ugb.org.br  
ISSN 2236-5664

## Revista Brasileira de Geomorfologia

v. 22, nº 1 (2021)

<http://dx.doi.org/10.20502/rbg.v22i1.1898>



# ANÁLISE DA DECLIVIDADE DE CANAIS FLUVIAIS COM USO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

## ANALYSIS OF FLUVIAL CHANNEL SLOPE BY USING DIFFERENTIAL CALCULUS

**Otávio Cristiano Montanher**

*Departamento de Geografia, Universidade Estadual de Maringá  
Av. Colombo, 5.790, Bloco 24, Maringá, Paraná. CEP 87020-900. Brasil*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-6995>*

*E-mail: [otaviocmontanher@yahoo.com.br](mailto:otaviocmontanher@yahoo.com.br)*

**Eduardo Souza de Moraes**

*Departamento de Geografia, Grupo de Estudos Multidisciplinares do Ambiente, Universidade Estadual de Maringá  
Av. Colombo, 5.790, Bloco 24, Maringá, Paraná. CEP 87020-900. Brasil*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0738-5532>*

*E-mail: [esmoraes2@uem.br](mailto:esmoraes2@uem.br)*

### Informações sobre o Artigo

Recebido (Received):  
08/04/2020

Aceito (Accepted):  
24/09/2020

### Palavras-chave:

Perfil Longitudinal; Derivada;  
Geomorfologia Fluvial.

### Keywords:

Longitudinal Profile; Derivative;  
Fluvial Geomorphology.

### Resumo:

A declividade de canais possui um importante papel na morfologia, estrutura, dinâmica e evolução da paisagem fluvial, sendo uma variável chave para a interpretação de processos e formas de um sistema fluvial. A declividade pode ser obtida a partir de uma solução linear aplicada aos dados de cotas altimétricas, o que permite a obtenção de valores que correspondem aos trechos compreendidos entre as estações. Porém, frequentemente nota-se uma escassez de dados altimétricos ao longo do perfil longitudinal de um rio, o que limita as análises geomorfológicas detalhadas. Com base nesse panorama, o objetivo deste artigo foi discutir o uso de conceitos de cálculo diferencial para análise da declividade em perfis longitudinais. São apresentados os principais tipos de funções elementares, bem como são apresentadas soluções para obtenção da declividade utilizando-se algumas dessas funções. Observou-se que as funções polinomial e exponencial são úteis para representação de perfis longitudinais, assim como para obtenção da declividade a partir da derivada de primeira ordem. Adicionalmente, demonstrou-se que as derivadas podem ser calculadas para pontos específicos de interesse ou para um grande conjunto de pontos ao longo do perfil longitudinal. No segundo caso, tem-se como resultado que a declividade se torna uma variável contínua, podendo ser avaliada quantitativamente ao longo do perfil longitudinal. Esta pesquisa permite as seguintes conclusões: i) a partir de dados de altitude e distância horizontal de um perfil, é possível estabelecer funções que representam a forma de um perfil longitudinal; ii) a primeira derivada sobre essas funções equivale à declividade de canais fluviais; iii) a segunda derivada pode ser utilizada para

obter informação sobre a concavidade do perfil e para encontrar seus pontos de inflexão; iv) finalmente, conclui-se que o Cálculo pode ser aplicado para o tratamento da variável declividade, tornando-o uma ferramenta a ser explorada em geomorfologia fluvial.

#### Abstract:

Channel slope plays an important role in the morphology, structure, dynamics and evolution of the fluvial landscape, which is a key variable to understanding processes and landforms in a fluvial system. Slope is frequently calculated by using a linear solution applied to altimetric data, which allows determining the average slope for a segment. However, the scarcity of altimetric data distributed along the longitudinal profile of rivers restrains detailed geomorphological analyses. Based on this overview, the aim of this paper is to discuss the use of differential calculus concepts to analyze slope in longitudinal profiles. The main elementary functions are presented, as well as solutions to obtaining slope by using some of those functions. Polynomial and exponential functions demonstrated to be useful to represent longitudinal profiles, as well as to calculate the slope by means of its first order derivative. Additionally, the derivatives might be calculated to specific points or for a large set of points throughout the longitudinal profile. In the second case, the slope becomes a continuous variable, which enables to be quantitatively evaluated along the longitudinal profile. This research has the following conclusions: i) it is possible to establish functions that represent the shape of a longitudinal profile by means of a profile database composed by altitude and horizontal distance; ii) the first-order derivative of those functions is equivalent to the channel slope; iii) the second derivative might be used to obtain information about the profile concavity and to determine its inflection points; iv) finally, it is concluded that the calculus might be applied to treatment of slope, which makes it a useful tool to be explored in fluvial geomorphology.

## 1. Introdução

Os canais fluviais possuem variações geométricas tridimensionais, caracterizadas por seus limites planimétricos, definidos em um sistema de coordenadas geográficas, ou UTM, por exemplo, e uma variação vertical, ou seja, altimétrica. A declividade, pendente ou gradiente (ou *slope*, em inglês) de um canal fluvial é a taxa de variação de altitude (Z) entre dois pontos e que podem ser medidas ao longo do eixo do perfil longitudinal. A declividade de um canal em um determinado trecho depende de processos endógenos, exógenos e também de interações complexas entre variáveis internas do sistema fluvial.

Com relação aos processos endógenos, podem ser mencionados os movimentos verticais da crosta, tanto orogênicos quanto epirogênicos e a resistência do substrato que compõe o leito. Sobre os processos exógenos, podem ser mencionados aqueles que controlam a vazão fluvial, como a precipitação, bem como os que afetam o nível de base. Sobre as interações complexas, menciona-se a retroalimentação negativa que ocorre em áreas de montante, diminuindo a declividade dos canais por meio da erosão, enquanto a declividade pode aumentar a jusante, por deposição (CHARLTON, 2008). Ainda segundo a mesma autora, variações de

declividade podem constituir respostas às mudanças no comprimento dos canais.

Em correspondência com outras variáveis, a declividade possui importante papel na morfologia, estrutura, dinâmica e evolução da paisagem fluvial. De modo geral, os maiores valores de declividade do canal ocorrem a partir da nascente, acompanhado da presença de corredeiras; enquanto os menores valores de declividade são encontrados no baixo curso, próximo à foz, associados à presença de planícies de inundação (CHARLTON, 2008). A declividade influencia na capacidade de transporte de sedimentos e contribui para determinar o padrão de canal (NICHOLAS, 2013). Complementarmente, estudos demonstram que a declividade influencia em mudanças do canal, como avulsões (PHILLIPS, 2011). Além disso, o funcionamento do sistema fluvial com o grau de conectividade de água, sedimento e matéria orgânica são indicados pela variação longitudinal da declividade do canal (WOHL, *et al.*, 2017).

De modo geral, com maior velocidade de fluxo, um canal tem mais energia para desenvolver processos erosivos e de transporte de sedimentos. A velocidade do fluxo no canal é controlada pelo raio hidráulico, pela rugosidade do canal e pela declividade, de modo que, quanto maior é a declividade, maior é a velocidade do

fluxo (STEVAUX e LATRUBESSE, 2017). Como esta é uma variável controladora da velocidade do fluxo, diversas outras variáveis (internas ao canal e da planície de inundação) também dependem dessa variável. Dessa forma, a taxa de transporte de sedimentos, as formas de leito, a configuração das margens e as características gerais dos sedimentos que são depositados nas planícies de inundação possuem relação com a declividade do canal (BLOM *et al.*, 2017).

O conceito de potência do canal (*stream power*) (Equação 1), dada na unidade de Watts (W), torna ainda mais clara a relação entre a energia do canal e a declividade.

$$\Omega = \rho g D Q \quad \text{eq.1}$$

em que:

$\rho$  = Densidade da água (1.000 kg m<sup>-3</sup>);

$g$  = Aceleração da gravidade (9,8 m s<sup>-2</sup>);

$D$  = Declividade (adimensional);

$Q$  = Vazão (m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>).

Observe que  $\rho$  e  $g$  normalmente são considerados como constantes (cujo produto origina o peso específico da água), portanto, a energia de um canal fluvial varia basicamente em função da declividade e da vazão. Para solução de um problema proveniente da comparação entre rios com diferentes tamanhos, a potência de canal é normalizada pela largura do canal, originando a potência de canal específica:

$$\omega = \frac{\Omega}{w} \quad \text{eq.2}$$

em que:

$w$  = largura do canal (m);

$\omega$  = potência de canal específica (W m<sup>-2</sup>).

A potência de canal específica é muito útil em termos de compreensão dos processos geomorfológicos de transporte e deposição de sedimentos, de tal modo que Nanson e Croke (1992) a utilizam como uma das principais características de diferenciação entre tipos de planícies de inundação. As planícies de inundação são classificadas pelos autores em três principais grupos (classes), com algumas subdivisões, em que um dos

principais critérios de distinção é a potência de canal específica, variando aproximadamente entre 10 e 1.000 W m<sup>-2</sup>.

Apesar da importância da declividade na compreensão de sistema fluviais, essa é uma variável que usualmente é obtida a partir de medidas de altitude entre estações de cota conhecida, o que permite a obtenção da declividade média para o trecho. Diminuir a distância entre as cotas conhecidas aumenta a demanda de esforços e de recursos, visto que são necessárias medidas precisas, pois alguns canais fluviais podem ter declividade muito baixa (poucos centímetros por km, por exemplo). Desta forma, pequenas variações nas medidas altimétricas podem resultar em grandes erros de determinação da declividade.

Outra questão importante a ser mencionada é que, por mais próximas que as medidas de cotas altimétricas sejam feitas, utilizando-se a aproximação linear sempre a declividade é definida como uma média para o trecho (Equação 3). A equação linear resulta em boas estimativas da declividade para um trecho de canal fluvial apenas quando a cota do canal possui um ajuste linear longo do perfil longitudinal, o que muitas vezes não condiz com a realidade dos sistemas fluviais.

$$D = \frac{Z_2 - Z_1}{H_2 - H_1} \quad \text{eq.3}$$

em que:

$Z_1$  = cota medida em um ponto de montante (m);

$Z_2$  = cota medida em um ponto de jusante (m);

$H_1$  = distância horizontal ao longo do perfil, no ponto de montante (m);

$H_2$  = distância horizontal ao longo do perfil, no ponto de jusante (m);

Com base na problematização e fundamentos apresentados, este artigo pretende discorrer sobre o uso de conceitos de cálculo diferencial para análise da declividade em perfis longitudinais. Tem-se como premissa que este campo de conhecimento da matemática pode ser aplicado para o tratamento da variável declividade de canais fluviais, sendo uma ferramenta a ser explorada com maior profundidade em geomorfologia fluvial. O uso de operações diferenciais no tratamento de dados de perfis longitudinais já é documentado na bibliografia,

e modelos complexos utilizam tais conceitos, em que muitos são automatizados em sistemas de informação geográfica (PIEFER; CREMON; ALVES, 2020)

As aplicações matemáticas possuem imenso potencial em uma diversidade de domínios da Geografia (KING, 1970), porém o uso do Cálculo é simultaneamente um desafio e um campo de oportunidades - que se estende ao desenvolvimento da Geomorfologia. Por isso, este artigo é essencialmente metodológico, sem a premissa de apresentar teoremas ou corolários, apesar de serem apresentados exemplos, tanto hipotéticos quanto com uso de dados reais. O objetivo principal é a explicação de um conjunto de técnicas. Os exemplos tratados neste artigo podem auxiliar o leitor a interpretar modelos já estabelecidos, como os descritos em Piefer, Cremon e Alves (2020).

Atenta-se ao fato de que a metodologia aqui descrita não se trata de uma inovação em matemática. Ao contrário, são apresentados conceitos básicos de Cálculo, conteúdos tratados em disciplinas introdutórias

sobre o tema, porém aqui direcionados a uma aplicação geomorfológica. Para os leitores que tiverem interesse em maior aprofundamento, há muitos livros-textos de Cálculo que podem ser consultados, como Leithold (1994), Stewart (2006) e Guidorizzi (2018).

## 2. Área de estudo

Algumas aplicações metodológicas do Cálculo para estudo da declividade, descritas adiante, foram desenvolvidas para um trecho de 40km do baixo curso do rio do Peixe, no estado de São Paulo (Figura 1). Com nascentes próximas ao município de Marília, o rio do Peixe flui por uma extensão de 380 km em direção oeste até a confluência com o rio Paraná. No baixo curso, a partir dos municípios de Ribeirão dos Índios e Jaciporã aproximadamente ao longo dos 70 km finais, a sedimentação quaternária (PERROTTA *et al.*, 2005) e o retrabalhamento fluvial torna o vale aluvial proeminente, estende-se progressivamente até o rio Paraná.

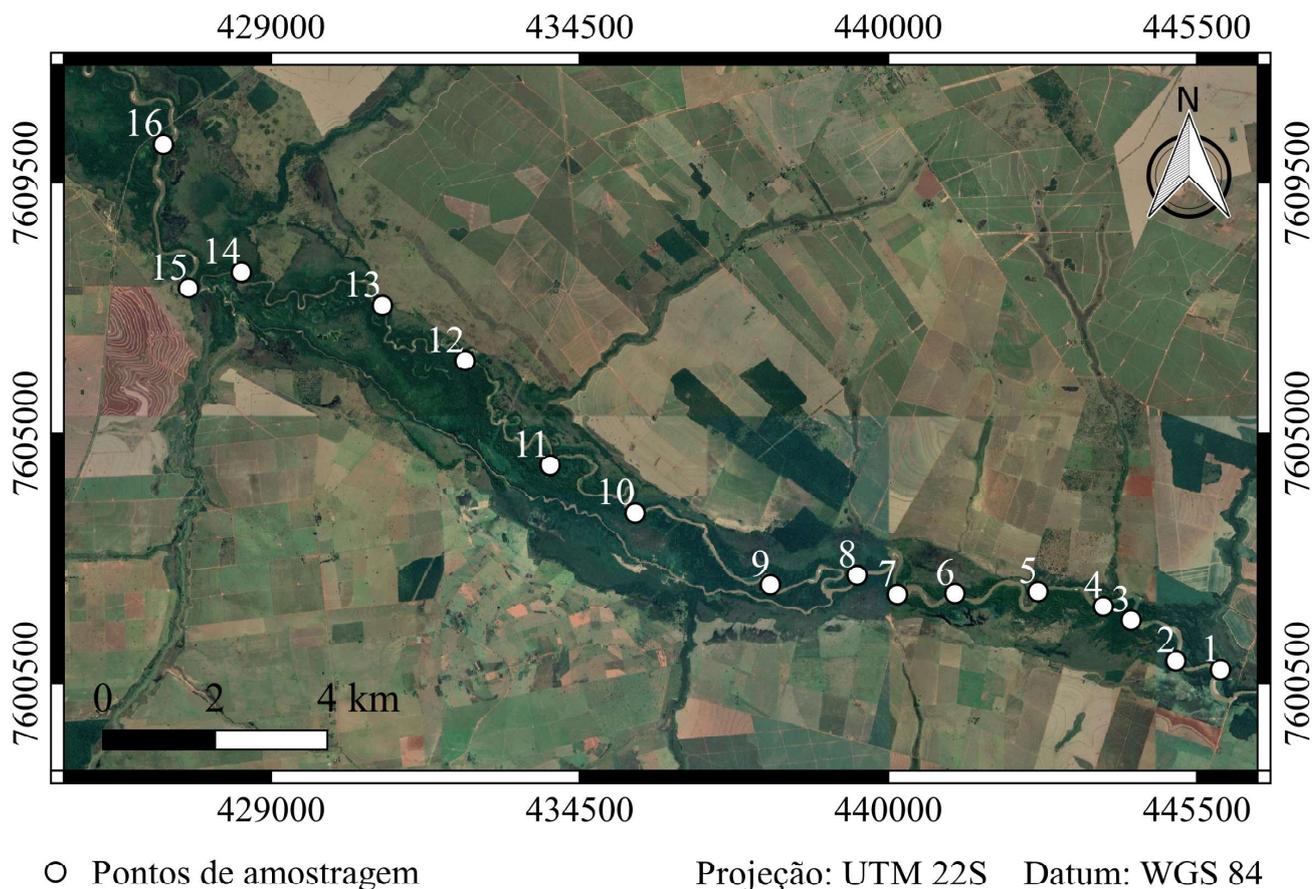


Figura 1 - Imagem orbital (Google Earth - composição colorida natural) relativa ao trecho do baixo rio do Peixe avaliado no estudo de caso. Os 16 pontos em branco indicam as áreas em que a altitude foi obtida por meio do Modelo Digital de Superfície.

Neste segmento o rio do Peixe apresenta um típico padrão de canal meandrante, com canal sinuoso, migração lateral intensa, cortes de pedúnculo e avulsões. Na planície de inundação nota-se na parte proximal unidades geomórficas que registram essa dinâmica como lagos em ferradura e paleocanais envoltos aos diques e paleodiques, enquanto que na parte distal notam-se bacias de inundação, com maior ocorrência, e também paleocanais. Ao vale aluvial acrescenta-se ainda terraços de corte e preenchimento que preservam os registros mais antigos da dinâmica fluvial com unidades geomórficas de paleocanais e bacias de inundação (MORAIS e ROCHA, 2016).

A precipitação média anual na área em estudo é de 1300 mm, com maior concentração nas estações de primavera e verão (SANT'ANNA NETO e TOMMASELLI, 2009), contudo as inundações ocorrem majoritariamente entre os meses de dezembro a março (MORAIS; ROCHA; HOOKE, 2016). O registro de vazões diárias na estação fluviométrica de Flora Rica entre os anos de 1976 e 2013, localizada a 10 km a montante do vale aluvial do rio do Peixe, apresenta uma marcante variabilidade. Os valores de vazões mínima, máxima e média desta série histórica são, respectivamente, de 9,20, 816,5 e 63,4 m<sup>3</sup>/s.

### 3. Funções

Uma premissa básica da aplicação do cálculo diferencial para análise da declividade de canais fluviais é que é possível representar um perfil longitudinal a partir de uma função. Essa premissa já foi adotada em pesquisas anteriores, Ohmori (1991), por exemplo, relacionou o tipo de função matemática (linear, exponencial ou de potência) que melhor descreve um perfil longitudinal e seu estágio evolutivo, para diversos rios no Japão.

Basicamente, uma função descreve o comportamento de uma variável em relação a uma outra variável. Leithold (1994) ainda define a função como uma correspondência entre um conjunto de números reais de uma variável X a um conjunto de números reais de uma variável Y. Para que essa relação seja considerada uma função, deve haver apenas um valor de Y para cada valor de X correspondente. É usual que a variável Y seja mencionada como a variável dependente, e a variável X seja mencionada como independente. No caso em questão, entende-se a altitude, ou cota (Y) variando em função da distância horizontal do perfil longitudinal (X).

Uma função pode ser representada por meio de diversas maneiras: conjuntos, tabelas, expressões algébricas e por meio de gráficos. A partir de expressões algébricas, define-se uma função de forma mais abrangente e suas propriedades matemáticas podem ser diretamente avaliadas. Por outro lado, a elaboração de gráficos permite a visualização do comportamento de uma função, o que muitas vezes facilita seu entendimento. A Figura 2 apresenta gráficos de algumas funções elementares, elaborados com uso do *software* GeoGebra (HOHENWARTER, 2002).

Acima de cada gráfico da Figura 2 pode ser observada a equação que define a função (expressão algébrica). A função a) define que o valor de Y é sempre igual a 1,5, ou seja, é sempre o mesmo. Esse tipo é denominado função constante, em que Y não varia em função de X. Não se trata de um tipo de função útil para análise de perfis longitudinais, pois sem variação de Y não há inclinação. As funções em b) e c) são funções lineares, que descrevem retas. O sinal do coeficiente que multiplica a variável X indica se a reta possui inclinação positiva (b) ou negativa (c). Este coeficiente possui um papel muito importante na análise da declividade, pois ele indica a própria inclinação da reta. Coeficientes próximos de zero indicam retas que se aproximam de uma função constante, enquanto valores maiores (positivos) ou menores (negativos) descrevem maiores inclinações. Este tipo de função descreve bem perfis longitudinais que não possuem variações de declividade, podendo ser considerada uma boa aproximação para trechos curtos.

Os gráficos d), e), f) e g) (Figura 2) representam as funções exponencial e logarítmica, com variações com relação ao valor de X positivo (funções d) e f)) ou para valores de X negativos (funções e) e g)). As duas últimas mencionadas (e, e g) podem ser úteis para representar perfis, mas em diferentes contextos. A função  $y = \ln(-x)$  pode representar um perfil com menores inclinações em seu trecho de montante e maiores em seu trecho de jusante. No entanto, é mais comum o gráfico representado por  $y = \exp(-x)$ , em g), com maiores inclinações nos trechos de montante e menores à jusante. A função polinomial (h) é possivelmente uma das funções mais úteis para descrição de perfis longitudinais, pois ela é capaz de representar uma variedade muito grande de formas. A função em i) representa um tipo específico de um conjunto de funções denominado como funções trigonométricas. Essas funções não têm a capacidade de representar adequadamente perfis longitudinais, a não ser em pequenos trechos, ou combinadas com outras funções.

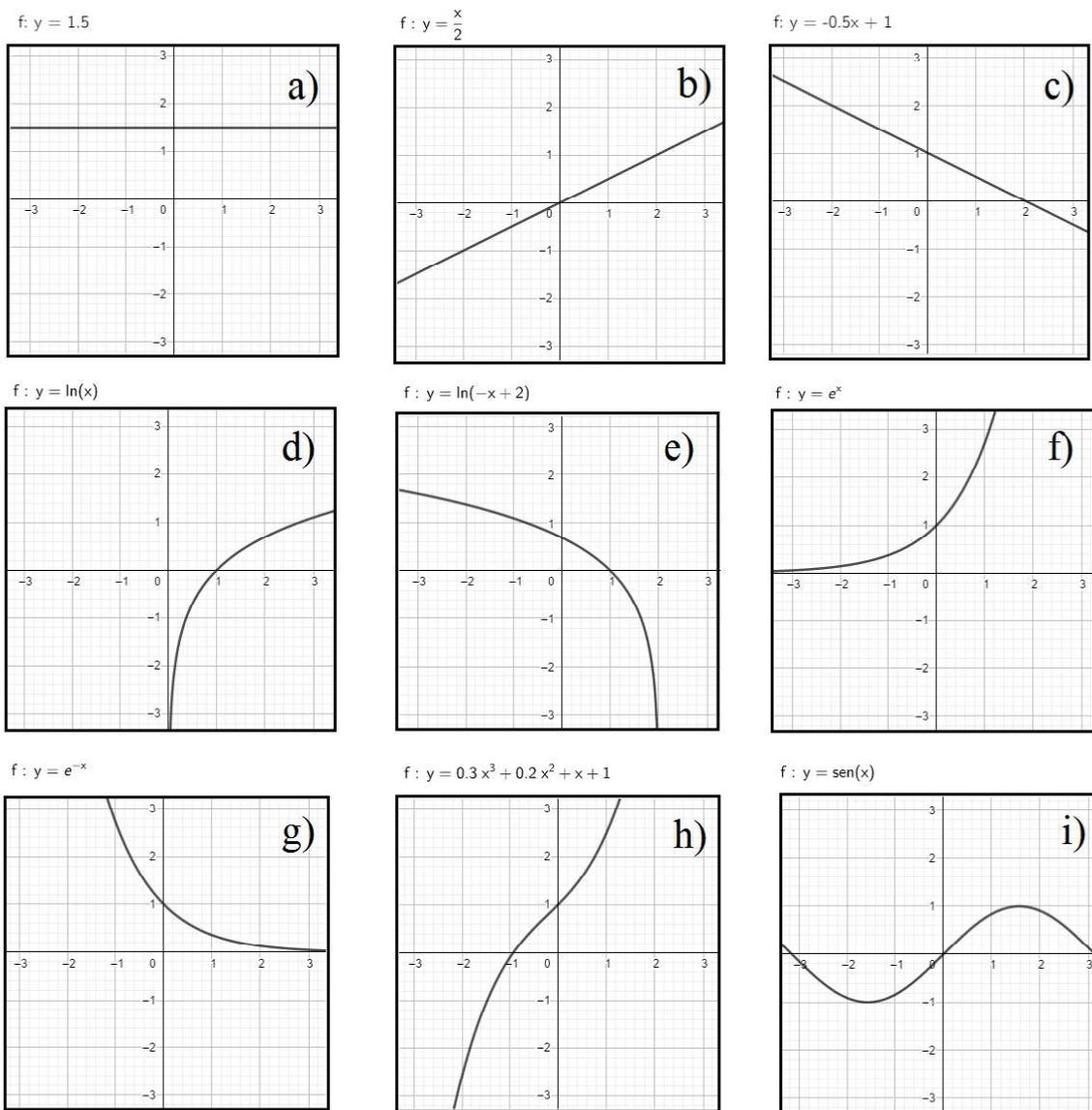


Figura 2 - Representação gráfica de algumas das funções mais comuns.

#### 4. Perfis longitudinais e a reta tangente

Os dados primários para elaboração de um perfil longitudinal podem ser descritos como um conjunto de pares de informações, altitude e distância horizontal (Figura 3a). Caso a equação 3 seja utilizada para obtenção da declividade entre dois pontos, o resultado fornecido é a declividade que possui a inclinação demonstrada pela reta em vermelho (Figura 3b). No entanto, note que na realidade, o perfil longitudinal exemplificado possui um comportamento exponencial (exemplo g) da Figura 2).

Observando o trecho entre os dois pontos em vermelho, o perfil ajustado para o comportamento não-

-linear (em azul) possui maior declividade do que a reta, no trecho de montante, e menor declividade no trecho de jusante. Observe também na Figura 3 que, em algum ponto desse trecho, deve haver um ponto do canal fluvial que sua declividade é igual à da reta em vermelho. Veja que a linha preta possui mesma inclinação do que a reta em vermelho e toca o perfil em um ponto.

O intuito do exemplo apresentado na Figura 3 é demonstrar que o problema de ser obter a declividade de um canal fluvial em um determinado ponto é exatamente o mesmo problema de se obter o coeficiente angular de uma reta tangente ao ponto de interesse, conforme podemos observar pela linha preta (Figura 3b).

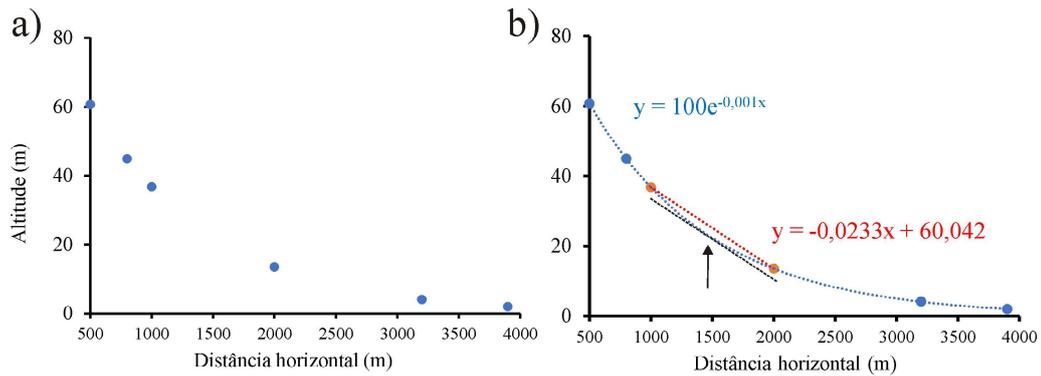


Figura 3 - Gráfico de dispersão entre a altitude de alguns pontos do perfil longitudinal e sua distância horizontal (a); O gráfico em b) apresenta uma representação não-linear para descrição do perfil longitudinal (linha pontilhada azul, equação em azul). Observe a reta ajustada entre dois pontos (em vermelho) e um ponto da curva azul que é tocada por uma reta preta, paralela à reta vermelha. A seta indica uma área provável em que a reta preta tangencia a curva azul.

### 5. O Cálculo

O problema descrito com o gráfico da Figura 3 pode ser abordado de modo analítico por meio do Cálculo. O Cálculo é uma área da matemática que foi estruturada e sistematizada por Isaac Newton (Inglaterra) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemanha) de forma independente, principalmente nas décadas de 1660 e 1670, embora possua antecedentes mais antigos (GRATTAN-GUINNESS, 1997). Os dois autores seguiram diferentes lógicas, mas obtiveram o mesmo resultado, que determina a relação entre a derivação e a integração, denominado como teorema fundamental do Cálculo. Os dois autores também utilizaram diferentes notações e terminologias. Isaac Newton, por exemplo, inicialmente denominou o campo de conhecimento como ciência dos fluxos, embora tenha predominado o termo Cálculo, de Gottfried Leibniz.

O Cálculo envolve três processos básicos, o cálculo de limites, de derivadas e de integrais. O cálculo de limites e de integrais não será tratado neste artigo, pois não são utilizados diretamente para o cálculo da declividade dos canais fluviais. No entanto, para os leitores que tiverem interesse em maior aprofundamento, recomenda-se o estudo para compreensão das relações que existem entre essas operações. Por exemplo, o cálculo de derivadas, importante para a aplicação apresentada neste artigo, só é possível para pontos de funções que apresentam continuidade. A continuidade, por sua vez, está relacionada com a existência do limite em um determinado ponto de uma função.

### 6. Derivadas de funções como declividade de canais fluviais

A derivada de uma função pode ser entendida como a taxa de variação de uma variável Y em função da variação de uma variável X. Tomando-se a altitude como Y, e a distância horizontal como X, a taxa de variação da altitude, em função distância, pode ser entendida ao mesmo tempo como a declividade do canal e a derivada da função ajustada. É importante denotar que essa interpretação direta é válida para quando as duas variáveis estão em mesma unidade (em metros, por exemplo). Recomenda-se a transformação das duas variáveis para mesma unidade, anteriormente ao tratamento matemático.

O caso mais simples de obtenção da declividade por meio da derivada de uma função, que pode ser usado na prática, é a partir da função linear. Suponha o caso representado na Figura 4a, em que há somente a informação altimétrica de dois pontos de um canal. A equação apresentada na Figura 4a se refere à própria equação da reta ajustada entre os dois pontos. Também tome  $y = f(x)$ , ou seja, a altitude é uma função da distância horizontal. A derivada de uma função qualquer pode ser denotada por:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \tag{eq.4}$$

No caso de uma função linear (Figura 4a), a derivada pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{d(-0,0233x + 60,042)}{dx} = \frac{d(-0,0233x)}{dx} + \frac{d(60,042)}{dx} \quad \text{eq.5}$$

$$-0,0233+0 = -0,0233 \quad \text{eq.6}$$

O valor -0,0233 já pode ser entendido diretamente como a declividade, a qual é adimensional (m/m). A de-

clividade possui valor negativo neste caso, pois o perfil longitudinal foi descrito a partir de zero (montante), e a distância horizontal aumentando para jusante. Para o uso da declividade na obtenção da potência de canal, por exemplo (equações 1 e 2), é necessário tomar o módulo da declividade (não há sentido físico para a energia do fluxo de água em valores negativos). Entendendo-se essa questão do sinal, podemos interpretar a declividade e transformar as unidades, caso seja de interesse. Por exemplo, o valor 0,0233 equivale a 2,33 cm/m, ou 23,3 m/km, ou ainda, em porcentagem, 2,33%.

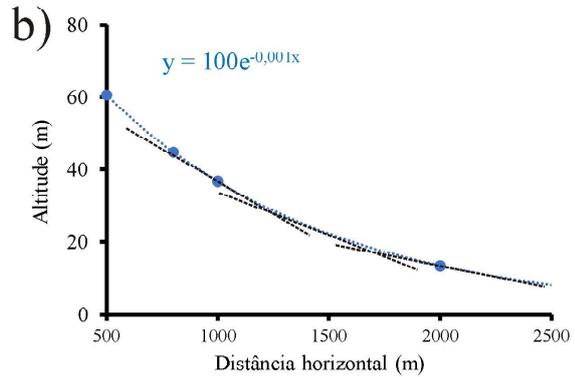
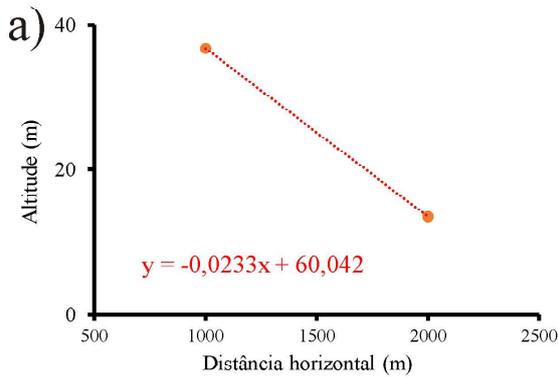


Figura 4 - Exemplos de obtenção da declividade a partir da derivada da função em dois casos: para um ajuste linear (a) e para um ajuste não-linear (b). No caso do ajuste em b) a declividade foi calculada para três pontos do perfil (1.000, 1.500 e 2.000 m), cujas retas tangentes estão representadas em preto.

Em termos da técnica do cálculo da derivada, primeiramente a função original foi separada pela soma (a derivada de uma soma é igual a soma das derivadas) (equação 5). Em segundo, foram aplicadas as seguintes regras: a derivada de uma constante é igual a zero e a derivada de um coeficiente que multiplica  $x$  é o próprio valor do coeficiente. Uma forma mais direta pode ser entendida como:

$$\frac{d(cx + b)}{dx} = c \quad \text{eq.7}$$

Ou seja, a derivada de uma transformação linear de  $x$  equivale ao próprio valor do coeficiente angular da reta. Outro caso de função que pode ser utilizada para representação de perfis longitudinais é a exponencial negativa (Figura 4b). Observe na Figura 4b que há três retas pretas, tangentes à curva que representa o perfil longitudinal em três pontos do eixo horizontal: 1.000,

1.500 e 2.000 m. Para se obter a declividade do canal nesses pontos, primeiramente é necessário obter a derivada da equação apresentada na Figura 4b:

$$\frac{d(100 \cdot e^{-0,001 \cdot x})}{dx} = 100 \cdot e^{-0,001 \cdot x} \cdot (-0,001) \quad \text{eq.8}$$

$$-0,1 \cdot e^{-0,001 \cdot x} \quad \text{eq.9}$$

A equação 9 apresenta o resultado da derivada, a qual foi obtida a partir das regras de diferenciação da função exponencial, do produto e da regra da cadeia (Equação 8) – para maior aprofundamento sobre as regras de diferenciação, consultar Leithold (1994), Stewart (2006) e Guidorizzi (2018). Observe que, ao contrário da derivada de uma função linear, que resultou em um valor constante (equação 6), a derivada obtida na equação 9 possui uma incógnita  $x$ . Essa característica é importante para entender o conceito central deste

artigo: a declividade varia conforme diferentes valores de distância horizontal. Retornando à Figura 4b, agora podemos obter a declividade do canal hipotético para os três pontos mencionados do perfil, 1.000, 1.500 e 2.000 m:

$$D_{1.000} = -0,1 \cdot e^{-0,001 \cdot 1.000} = -0,03679 \quad eq.10$$

$$D_{1.500} = -0,1 \cdot e^{-0,001 \cdot 1.500} = -0,02231 \quad eq.11$$

$$D_{2.000} = -0,1 \cdot e^{-0,001 \cdot 2.000} = -0,01353 \quad eq.12$$

Os valores calculados nas equações 10, 11 e 12 referem-se aos pontos mencionados do perfil longitudinal do perfil hipotético da Figura 4b. Observe nessa figura como nos trechos iniciais do perfil (sentido de montante para jusante) a declividade é maior, enquanto nos trechos de jusante a declividade diminui. É interessante observar que em 1.500 m de distância do perfil o valor de declividade obtido é muito próximo ao valor calculado pela reta ajustada com apenas dois pontos (Figura 4a). Distanciando-se desse ponto central (em 1.500 m), a declividade difere, para mais ou para menos, conforme a direção que se avalia.

Um último exemplo de uso das derivadas a ser apresentado é com uso de dados reais, relativos ao baixo curso do rio do Peixe (SP). Para um trecho de aproximadamente 40 km desse rio obteve-se uma série

de medidas de altitude do centro do canal a partir de um Modelo Digital de Superfície (MDS) de 2011 com resolução espacial de 5 m, gentilmente cedido pela Empresa Paulista de Planejamento Metropolitano S/A (EMPLASA). Para cada ponto de amostragem foram tomadas médias de valores referentes a pixels que não continham efeito das margens (a localização desses pontos pode ser observada na Figura 1).

Apesar das medidas altimétricas apresentarem a tendência geral do canal, de diminuição da altimetria para jusante (Figura 5a), erros de determinação da altimetria, relacionados ao MDS, fazem com que surjam algumas inconsistências, como um ponto de jusante do canal ter maior altitude do que um ponto de montante. Tais erros de determinação da altitude em MDSs são inerentes ao produto, e observe que mesmo erros de baixa ordem ( $\pm 1$  m) são problemáticos ao cálculo da declividade do canal, caso seja tomada a diferença simples entre as cotas (equação 3).

Entretanto, mesmo no caso de bases de dados que possuam erros de determinação da altimetria, é possível definir uma função que descreva o perfil de modo conveniente, por meio de técnicas como o método dos mínimos quadrados. Tais ajustes podem ser feitos em diversos *softwares* de processamento de dados, como o *Excel*. No caso do trecho do rio do Peixe, ajustou-se uma função polinomial de terceira ordem, que explica aproximadamente 98% da variabilidade do conjunto de dados original (Figura 5b).

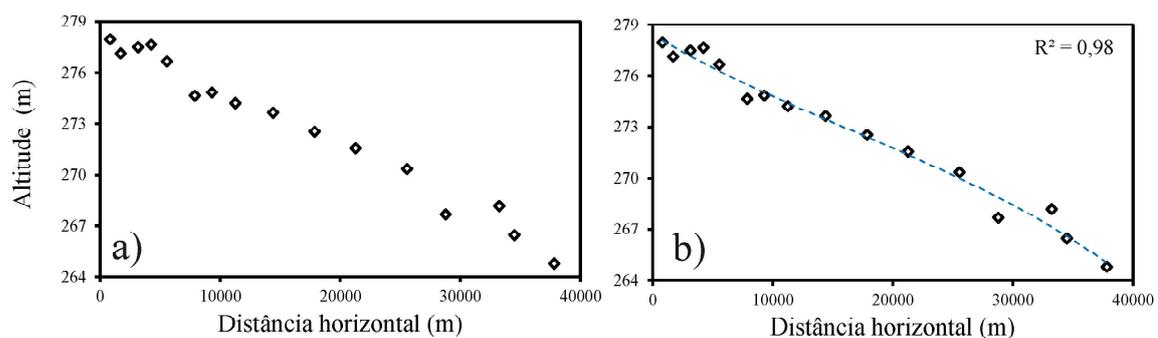


Figura 5 - Pontos com informação de altitude relativos ao baixo curso do rio do Peixe (SP), (a); Função polinomial ajustada ao conjunto de dados (b). A localização dos 16 pontos pode ser observada na Figura 1.

A função descrita da Figura 5b é definida pela equação:

$$y = -1,461763253 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 + 7,2617934064631 \cdot 10^{-9} \cdot x^2 - 4,1931958474923 \cdot 10^{-4} \cdot x + 278,4 \quad eq.13$$

A equação 13 apresenta os coeficientes com muitas casas decimais, que não podem ser desprezadas, principalmente para os termos de maior ordem. A declividade do canal para qualquer ponto do perfil ajustado é obtida por:

$$\frac{d(-1,461763253 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 + 7,2617934064631 \cdot 10^{-9} \cdot x^2 - 4,1931958474923 \cdot 10^{-4} \cdot x + 278,4)}{dx}$$

eq.14

$$= \frac{d(-1,461763253 \cdot 10^{-13} \cdot x^3)}{dx} + \frac{d(7,2617934064631 \cdot 10^{-9} \cdot x^2)}{dx} - \frac{d(4,1931958474923 \cdot 10^{-4} \cdot x)}{dx} + \frac{d(278,4)}{dx}$$

eq.15

$$= -4,385289759 \cdot 10^{-13} \cdot x^2 + 14,52358681 \cdot 10^{-9} \cdot x - 4,1931958474923 \cdot 10^{-4}$$

eq.16

Em que a equação 16 apresenta a função para o cálculo da declividade. Neste caso, a derivada foi calculada utilizando-se a regra da soma das derivadas (também utilizada na equação 5) e um importante tipo de derivação, a regra do polinômio (ou regra do tomo):

$$\frac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

eq.17

em que:

$\alpha$  = qualquer número racional.

Como a função polinomial pode assumir diversas formas, dependendo basicamente da quantidade de termos que se adiciona, ela pode ser aplicada para descrição de muitos tipos de perfis longitudinais. Portanto, a regra definida na equação 17 e o exemplo de cálculo apresentado nas equações 14, 15 e 16 podem ser úteis para o leitor que pretenda avaliar seu estudo de caso.

A declividade pode ser calculada para pontos específicos em que há interesse, como no exemplo apresentado na Figura 4. Em termos de uso em geomorfologia fluvial, a declividade pontual pode ser importante para avaliação de possíveis relações com variações locais na forma e textura dos sedimentos que compõem as margens, mudanças planimétricas do canal, entre outras características. No entanto, outra forma de se explorar essa técnica é gerar derivadas para pontos pouco espaçados do perfil, formando uma nova variável, que seria uma forma de se avaliar de modo praticamente contínuo as variações de declividade do canal.

Para exemplificar essa outra forma de análise, calculou-se a declividade a cada 100 m de distância para o trecho do rio do Peixe, no trecho avaliado, tendo como produto uma visualização gráfica da variação longitudinal da declividade (Figura 6).

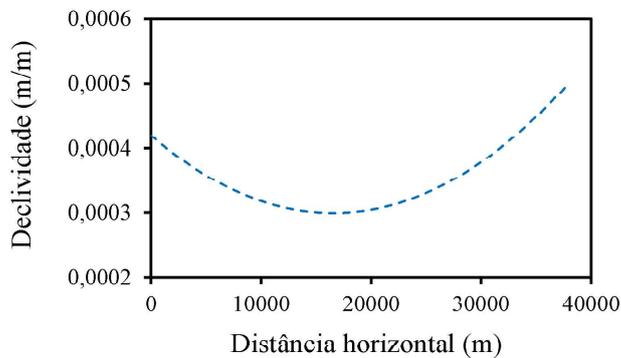


Figura 6 - Declividade calculada a cada 100 m para o trecho do rio do Peixe representado na Figura 5.

Na Figura 6 já é apresentado o módulo da declividade (valores positivos), em que é possível observar que no trecho de montante a declividade é maior do que 0,0004 e diminui no sentido de jusante até aproximadamente 0,0003 entre 10 e 20 km. A partir desse trecho a declividade volta a aumentar a jusante. A possibilidade de se avaliar a declividade de modo contínuo pode auxiliar no estudo de relações entre a energia do canal e variáveis geomorfológicas diversas de modo holístico. Essas variáveis incluem, entre outras: forma planimétrica do canal, forma e textura das margens, transporte de sedimentos, construção e rompimento de diques marginais e avulsões.

### 7. Forma do perfil

Ao longo do perfil, a declividade do canal pode apresentar ampla variação e variedade de formas dependente da escala (HARMAR e CLIFFORD, 2007). Uma forma frequente é de perfis que apresentam declividade maior no alto curso com progressiva diminuição para jusante (Figura 7A). O caso contrário é de perfis que apresentam menores declividades nos trechos de montante e maiores para jusante (Figura 7B).

Os gráficos da Figura 7 representam duas situações específicas de formas de funções, em que a função em

6A é convexa e a função em 6B é côncava. Essa característica é denominada concavidade, sendo duas situações possíveis, concavidade voltada para cima (convexa) ou para baixo (côncava).

O tipo de concavidade do perfil pode ser relacionado com características geomorfológicas que podem

variar longitudinalmente, como: grau de evolução do canal, variações de resistência do substrato litológico, disponibilidade de sedimentos e vazão (BRIERLEY e FRYIRS, 2005). O tipo de concavidade pode ser determinado para qualquer ponto do perfil utilizando-se uma regra baseada no conceito de segunda derivada.

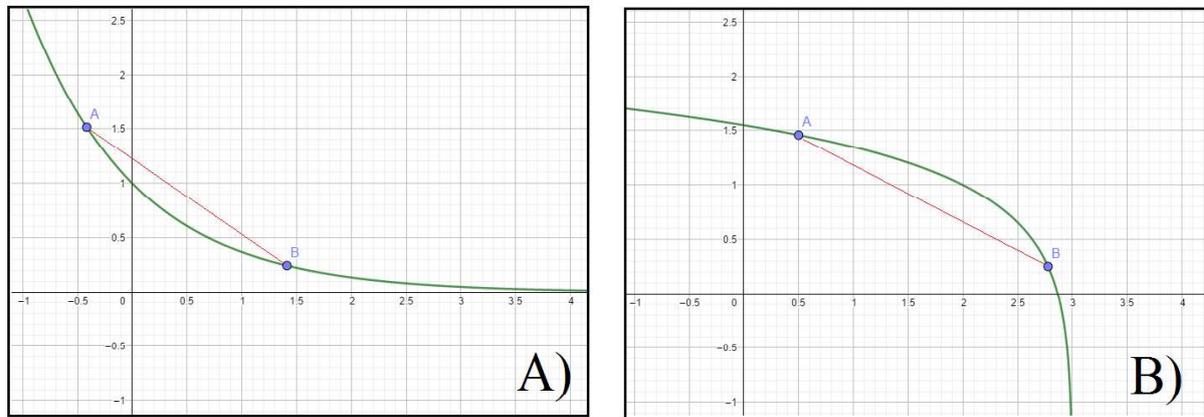


Figura 7 - Duas situações de concavidade: voltada para cima (convexa - A) e voltada para baixo (côncava - B). Uma forma simples de se realizar essa verificação é traçar uma reta entre dois pontos da função e verificar se ela está acima (convexa) ou abaixo (côncava) da função. OBS: esse teste não é válido em algumas situações, ver Leithold (1994).

$$\frac{d \frac{df(x)}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad 0,000022313 \quad \text{eq.22}$$

Ou seja, a partir do resultado da primeira derivada de uma função, ela é derivada novamente em relação à variável x. Com base na segunda derivada, a concavidade é determinada da seguinte forma:

se:  $> 0$ , o gráfico é convexo em a; eq.19

se:  $< 0$ , o gráfico é côncavo em a; eq.20

Como exemplo dos conceitos deste tópico, observe novamente a função apresentada na Figura 4B e sua primeira derivada (Equação 9). A segunda derivada é obtida da seguinte forma (de modo análogo à primeira derivação):

$$\frac{d(-0,1 \cdot e^{-0,001 \cdot x})}{dx} = 0,0001 \cdot e^{-0,001 \cdot x} \quad \text{eq.21}$$

Obtendo-se a segunda derivada, podemos realizar a análise da concavidade apresentada por esta função no ponto de 1.500 m, por exemplo:

Observe que o resultado da equação 22 é positivo, portanto, o gráfico deve ser convexo neste ponto (compare o gráfico da Figura 4B com o da Figura 7A). De fato, a função exponencial é convexa para todo seu domínio.

### 8. Pontos de inflexão

Perfis longitudinais equivalentes aos gráficos da Figura 7 (em termos de forma) não representam todas as formas possíveis de perfis. Mudanças em variáveis como substrato, disponibilidade de sedimentos, vazão e tectônica fazem com que o perfil de um mesmo canal se comporte de modo convexo em alguns trechos e côncavo em outros. Considerando um canal que tenha essa característica, e uma função que a descreva, podem ser determinados pontos que separam o perfil em trechos com diferentes formas. Em Cálculo, os pontos que se comportam como limites dessas diferentes formas, em uma mesma função, são denominados pontos de inflexão. Em termos geomorfológicos, esses pontos limitam os trechos de canal com formas específicas, em que o perfil longitudinal do canal pode ser côncavo até este ponto e convexo a partir dele, por exemplo.

Devido a um possível conflito terminológico, é importante fazer uma distinção conceitual entre a definição apresentada no parágrafo anterior e os níveis de base locais, os quais também são denominados como pontos de inflexão, ou também “rupturas de declive” e “rupturas de gradiente” ou em inglês como *knickpoints* (LANA e CASTRO, 2012). Enquanto os níveis de base locais são trechos curtos de canais, que apresentam maior declividade em relação aos trechos adjacentes (CHARLTON, 2008; LANA e CASTRO, 2012), os pontos de inflexão denotados neste tópico referem-se aos pontos que limitam diferentes formas de canais (concavidade). Em certas situações tais pontos de inflexão podem coincidir com níveis de bases locais, enquanto em outras situações os pontos de inflexão podem ocorrer em condições opostas, de baixa declividade. Portanto, a mudança de forma do perfil (em termos de concavidade) não irá indicar sempre um nível de base local.

Pontos de inflexão podem ser percebidos com facilidade em canais que passam por áreas com diferenças litológicas (composição e/ou estrutura), algumas vezes com presença de cachoeiras e corredeiras nesses locais. Outros pontos de inflexão podem ser mais sutis, em canais aluviais, por exemplo, e podem auxiliar na interpretação da dinâmica de transporte e deposição de sedimentos, por exemplo. Pontos de inflexão de funções contínuas podem ser determinados com uso da segunda derivada. Denotando-se um possível ponto de inflexão como *c*, ele deve atender o seguinte critério:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(c) = 0 \tag{eq.23}$$

Para exemplificar o uso da equação 23, foi utilizado o conjunto de dados do rio do Peixe, em que a

função que descreve o perfil longitudinal (equação 13) foi derivada novamente (o resultado de sua primeira derivada encontra-se na equação 16):

$$\frac{d(-4,385289759 \cdot 10^{-13} \cdot x^2 + 14,52358681 \cdot 10^{-9} \cdot x - 4,1931958474923 \cdot 10^{-4})}{dx} \tag{eq.24}$$

$$= -8,770579518 \cdot 10^{-13} \cdot x + 14,52358681 \cdot 10^{-9} \tag{eq. 25}$$

Em que a equação 25 representa o resultado da segunda derivada para a função ajustada ao perfil longitudinal do rio do Peixe. Aplicando-se o conceito descrito na equação 23:

$$-8,770579518 \cdot 10^{-13} \cdot x + 14,52358681 \cdot 10^{-9} = 0$$

$$x = \frac{-14,52358681 \cdot 10^{-9}}{-8,770579518 \cdot 10^{-13}} \tag{eq. 26}$$

$$x = 16.559,44 \text{ m} \tag{eq. 27}$$

A equação 27 mostra que há apenas um ponto de inflexão no perfil demonstrado na Figura 5, que ocorre a 16.560 m de distância horizontal a partir do início do perfil em direção a jusante. No início do perfil (0 m) do trecho avaliado do rio do Peixe a declividade diminui em direção a jusante, com um mínimo exatamente sobre o ponto de inflexão (Figura 8). Observe que, a partir deste ponto, indicado pela linha vermelha na Figura 8, a declividade aumenta progressivamente. Equações polinomiais de ordem superior são capazes de representar formas mais complexas, em que podem ser encontrados mais pontos de inflexão em relação ao exemplo apresentado.

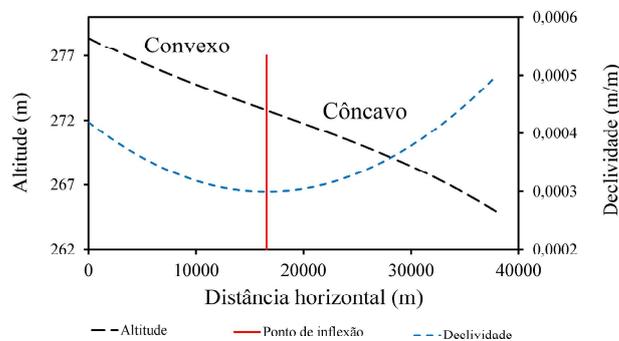


Figura 8 - Perfil longitudinal estimado por meio da função ajustada aos dados (linha preta pontilhada). Primeira derivada do perfil, indicando a variação da declividade em um trecho de aproximadamente 38 km do rio do Peixe em seu baixo curso (linha azul pontilhada - módulo). A linha vermelha contínua indica a posição do ponto de inflexão do perfil, em 16.560 m. À montante deste ponto a função é convexa, e à jusante é côncava.

## 9. Considerações finais

Esse artigo buscou apresentar uma visão geral sobre o uso de cálculo diferencial para um conjunto de aplicações específicas em geomorfologia fluvial, para análise da declividade de canais fluviais. Neste texto foram apresentados conceitos e referências detalhando o uso do Cálculo, além de exemplos com objetivo didático.

Com (MDSs), o cálculo da declividade de canais fluviais por meio da derivada simples (equação 3) pode resultar em inconsistências, como derivadas positivas (aumento de altitude à jusante), provenientes dos erros de estimativa altimétrica dos próprios MDSs. Uma forma de tratamento desse problema é zerar a declividade nesses pontos, o que criaria um tipo de representação em corredeiras-poços (*step-pools*), o que pode, ou não, ser consistente com a realidade física do canal. Ajustando-se uma função que descreva adequadamente o perfil longitudinal de um canal fluvial, pode-se obter a declividade para cada ponto, sem limitações.

No entanto, é necessário chamar a atenção para alguns pontos importantes sobre o uso das técnicas apresentadas: i) a capacidade de representação do perfil, por meio de funções, depende de um conjunto de entrada de dados altimétricos em escala compatível com a escala de trabalho desejada; ii) o ajuste da função depende do conhecimento de algumas propriedades básicas das funções elementares (exponencial, polinomial, linear) e de algumas técnicas estatísticas para avaliação do ajuste; iii) alguns perfis podem ser muito complexos, com diversos pontos de inflexão, de modo que não exista função (com derivada sempre negativa no intervalo de interesse) que os descreva adequadamente. Nesses casos, aconselha-se tratar o perfil longitudinal em segmentos distintos, ajustando-se funções para cada trecho em separado; iv) o método apresentado nesse artigo é indicado para canais fluviais cuja variação da declividade seja contínua, ao invés de marcada por *step-pools*.

A pesquisa apresentada permite as seguintes conclusões: i) tendo-se uma base de dados composta por pares de informações de altitude e distância horizontal de um perfil, é possível estabelecer funções que descrevem, de modo matemático, a forma do perfil (a complexidade das funções varia com a complexidade das formas dos perfis); ii) aplicando-se a primeira derivada, pode-se calcular a declividade do canal para pontos específicos do perfil e também para uma sequência de pontos próximos, o que resulta em um produto

praticamente contínuo da declividade; iii) o teste da segunda derivada fornece informações sobre a forma do perfil (convexo ou côncavo), informação que pode ser relacionada com variáveis relevantes do sistema fluvial; iv) a segunda derivada também pode ser utilizada para identificação de pontos de inflexão do perfil; v) por fim, entende-se que o cálculo diferencial pode ser aplicado para o tratamento da variável declividade de diferentes maneiras, tornando-o uma ferramenta a ser explorada em geomorfologia fluvial.

## Agradecimentos

Este artigo foi desenvolvido em regime de trabalho de dedicação exclusiva na Universidade Estadual de Maringá, a qual agradecemos pelo apoio institucional. Também agradecemos às críticas e sugestões do revisor.

## Referências Bibliográficas

- BRIERLEY, G. J.; FRYIRS, K. **Geomorphology and River Management: Applications of the River Style Framework**. Oxford, U.K: Blackwell. 2005. 412 p.
- BLOM, A.; ARKESTEIJN, L.; CHAVARRÍAS, V.; VIPARELLI, E. The equilibrium alluvial river under variable flow and its channel-forming discharge. **Journal of Geophysical Research: Earth Surface**, v. 122, p. 1924–1948, 2017. DOI: 10.1002/2017JF004213
- CHARLTON, R. **Fundamentals of Fluvial Geomorphology**. Abingdon: Routledge. 2008. 280 p.
- GRATTAN-GUINNESS, I. O que foi e o que deveria ser o Cálculo? Tradução: Frederico da Silva Reis. **Zetetiké**, v. 5, n. 7, p. 69-94, 1997.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Volume 1. 6. ed. São Paulo: LTC, 2018. 580 p.
- HARMAR, O. P.; CLIFFORD, N. J. Geomorphological explanation of the long profile of the lower Mississippi River. **Geomorphology**, v. 84, p. 222–240, 2007. DOI: 10.1016/j.geomorph.2006.01.045
- HOHENWARTER, M. **GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene** (em alemão). Paris Lodron University, Salzburg, Áustria. 2002.
- KING, C. A. M. Mathematics in Geography. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 1, n. 2, p. 185-205. 1970. DOI: 10.1080/0020739700010208

- LANA, C. E.; CASTRO, P. T. A. Evolução histórica e filosófica do conceito de nível de base fluvial. **Terræ didactica**, v. 8, n. 1, p. 51-57, 2012. DOI: <https://doi.org/10.20396/td.v8i1.8637426>.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1, 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 685 p.
- MORAIS, E. S.; ROCHA, P. C. Formas e processos fluviais associados ao padrão de canal meandrante: o baixo rio do Peixe, SP. **Revista Brasileira de Geomorfologia**, v. 17, p. 431-449, 2016. DOI: 10.20502/rbg.v17i3.813
- MORAIS, E. S.; ROCHA, P. C.; HOOKE, J. M. Spatio-temporal variations in channel changes due to cumulative factors in a meandering river: the Peixe River, Brazil. **Geomorphology**, v. 273, p. 348-360, 2016. DOI: 10.1016/j.geomorph.2016.07.026
- NANSON, G. C.; CROKE, J. C. A genetic classification of floodplains. **Geomorphology**, v. 4, n. 6, p. 459-486. 1992. DOI: 10.1016/0169-555X(92)90039-Q
- NICHOLAS, A. P. Modelling the continuum of river channel patterns. **Earth Surface Processes and Landforms**, v. 38, n. 10, p. 1187-1196, 2013. DOI: 10.1002/esp.3431
- OHMORI, H. Change in the mathematical function type describing the longitudinal profile of a river through an evolutionary process. **Journal of Geology**, v. 99, n. 1, p. 97-110, 1991. DOI: 10.1086/629476
- PERROTTA, M. M.; SALVADOR, E. D.; LOPES, R. C.; D'AGOSTINO, L. Z.; PERUFFO, N.; GOMES, S. D.; SACHS, L. L. B.; MEIRA, V. T.; LACERDA FILHO, J. V. **Mapa Geológico do estado de São Paulo**, Escala 1:750.000, SIG. São Paulo. Convênio CPRM/Secretaria de Energia, Recursos Hídricos e Saneamento do Estado de São Paulo, 2005.
- PHILLIPS, J. D. Universal and local controls of avulsions in southeast Texas Rivers. **Geomorphology**, v. 130, n. 1-2, p. 17-28, 2011. DOI: 10.1016/j.geomorph.2010.10.001.
- PIEFER, D.; CREMON, E. H.; ALVES, F. A. Ferramentas modernas para a extração de métricas de gradientes fluviais a partir de MDEs: uma revisão. **Revista Brasileira de Geomorfologia**, v. 21, n. 1, p. 117-138, 2020. DOI: 10.20502/www.ugb.org.br\_rbg.v21i1.1732
- SANT'ANNA NETO, J. L.; TOMMASELLI, J. T. G. **O tempo e o clima de Presidente Prudente**. Presidente Prudente: FCT/UNESP, 2009.
- STEVAUX, J. C.; LATRUBESSE, E. M. **Geomorfologia fluvial**. São Paulo: Oficina de textos. 2017. 320 p.
- STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1, 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006. 581 p.
- WOHL, E.; RATHBURN, S.; CHIGNELL, S.; GARRETT, K.; LAUREL, D.; LIVERS, B.; PATTON, A.; RECORDS, R.; RICHARDS, M.; SCHOOK, D. M.; SUTFIN, N. A.; WEGENER, P. Mapping longitudinal stream connectivity in the North St. Vrain Creek watershed of Colorado. **Geomorphology**, v. 277, p. 171-181, 2017. DOI: 10.1016/j.geomorph.2016.05.004.